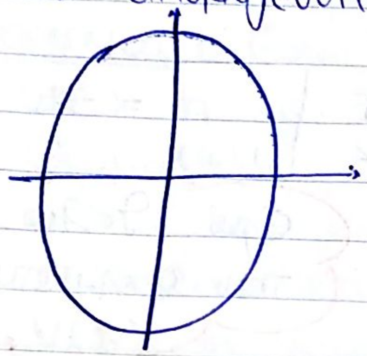
10ο μάθημα
11/5/20

$\boxed{\text{Πχ}}$ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$ (έλλειψη)

Ασύμπτωτες ?

Βρίσκω σημεία στο ∞, βρίσκω εφαπτομ. στο ∞ κ. απομογενοποιώ



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$$

$\downarrow$ Ομογενοποιώ

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=0$$

$\downarrow z=0$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}-i\cdot\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}+i\cdot\frac{y}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}-i\cdot\frac{y}{3}=0 \quad \text{ή} \quad \frac{x}{2}+i\cdot\frac{y}{3}=0$$

αν $y=3 \rightarrow x=2i$ άρα $(2i,3,0)$ ιδιόμ. σ.

αν $y=3 \rightarrow x=-2i$ άρα $(-2i,3,0)$ ιδιόμ. σ.

Εφαπτόμ. στο σημείο στο ∞:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=0$ Θέλω εφαπτ. στο $(2i,3,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\gamma)\,x+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\gamma)\,y+\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,\gamma)\,z=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(2i,3,0)=i$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{9} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(2i,3,0)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-2z \rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(2i,3,0)=0$$

άρα $iX + \frac{2}{3}Y + 0 \cdot Z = 0$

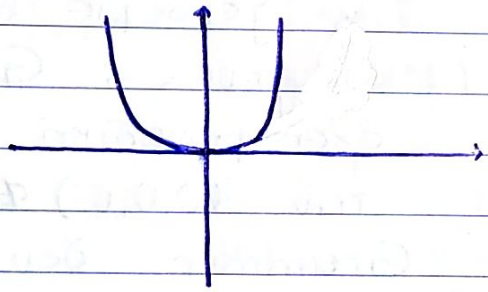
κ' αντίστ. στο $(-2i, 3, 0)$:

$$-iX + \frac{2}{3}Y + 0 \cdot Z = 0$$

Απομηδενοποιώ $Z=1$: $\left.\begin{array}{l} iX + \frac{2}{3}Y = 0 \\ -iX + \frac{2}{3}Y = 0 \end{array}\right\}$ Ασύμπτ.

Σχηματικά?
Δε φαίνονται. Μόνο ένα σημείο φαίνεται, το $(0,0)$

$\boxed{\text{π.χ}}$ $V(y-x^2)$ (παραβολή)



Ασύμπτωτες?

$$y - x^2 = 0 \xrightarrow{\text{Ομογεν.}} YZ - X^2 = 0$$
$$\downarrow Z=0$$
$$-X^2 = 0 \Rightarrow X=0$$
$$\Rightarrow (0,1,0)$$

σημείο στο ∞

Εφαπτόμ. στο ∞: $\frac{\partial F}{\partial X} = -2X \rightarrow \frac{\partial F}{\partial X}(0,1,0) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = Z \rightarrow \frac{\partial F}{\partial Y}(0,1,0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = Y \rightarrow \frac{\partial F}{\partial Z}(0,1,0) = 1$$

άρα $0 \cdot X + 0 \cdot Y + 1 \cdot Z = 0 \Rightarrow Z = 0$

Απομηδενοποιώ $(Z=1)$ για να βρω την ασύμπτωτη

$1 = 0$ ΑΔΥΝΑΤΟ

άρα $\nexists$ ασύμπτωτη

$q = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$

Ιδιόμορφα σ. ?

Ομογενοποιώ:

$$Q = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta XZ + \varepsilon YZ + \zeta Z^2 = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial X} = 2\alpha X + \beta Y + \delta Z = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Y} = \beta X + 2\gamma Y + \varepsilon Z = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial Z} = \delta X + \varepsilon Y + 2\zeta Z = 0 \end{cases}$$

ομογενές γραμμικό σύστημα (έχει πάντα λύση το $(0,0,0)$)

Πότε είναι σύστημα Grammer? → ορίζουσα $\neq 0$ δηλ.

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & \beta & \delta \\ \beta & 2\gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & 2\zeta \end{vmatrix} \neq 0$$

κ. ξέρουμε ότι ομογενές σ. Grammer έχει μοναδική λύση την $(0,0,0) \notin P^2$

άρα αν είναι συστ. Grammer, δεν έχουμε ιδιόμορφο σημείο.

Δηλ. Q ανάγωγη

$\Rightarrow V(Q)$ έλλειψη, παραβολή ή υπερβ.

Όταν τώρα

$$\begin{array}{cccc} & & \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Q}{\partial X \partial Z} \\ & \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta & \delta \\ \beta & 2\gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & 2\zeta \end{vmatrix} & & \end{array} = 0$$

δηλ. αυτή είναι η Εσσιανή

$\Rightarrow$ δύο ευθείες ή μία διπλή

$\Rightarrow Q$ μη ανάγωγη

άρα: $H_F = 0 \Rightarrow F$ μη ανάγωγη

$H_F \neq 0 \Rightarrow F$ ανάγωγη

· Αν $H_Q \neq 0$: Το αν είναι έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή θα μας το πει η συμπεριφορά του στο ∞ δηλ. ο μεγιστοβάθμιος

$$M(Q) = a x^2 + \beta x y + \gamma y^2$$

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$$

$\Delta > 0 \iff \beta^2 > 4a\gamma$: υπερβολή

$\Delta = 0 \iff \beta^2 = 4a\gamma$: παραβολή

$\Delta < 0 \iff \beta^2 < 4a\gamma$: έλλειψη

Είχαμε δει : $K[x_1, \dots, x_n]$ ΠΜΑ

$\nwarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots x_n) \dots f_s(x_1, \dots x_n)$

γινόμενο αναγώγων

κ. επίσης είδαμε ότι :

$\boxed{\Theta}$: Αν $f = f_1 f_2 \dots f_s$ αναγωγά

$\Rightarrow V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \dots \cup V(f_s)$

$V(f_i)$ λέγονται αναγωγες συνιστ.

Π.χ. $f = xy(x^2 + y^2 - 1)$

$V(f) = V(x) \cup V(y) \cup V(x^2 + y^2 - 1)$

$f = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $y = 0$ ή $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Ασθενές

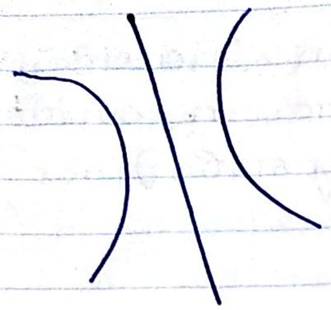
ΘΕΩΡΗΜΑ Bezout : Αν δύο καμπύλες βαθμού m, n αντίστοιχα έχουν περισσότερα από m·n κοινά σημεία τότε έχουν κοινή συνιστώσα

Ισχυρό ΘΕΩΡΗΜΑ Bezout : Αν δύο καμπύλες V(F), V(G) του προβολικού μιγαδικού επιπέδου βαθμού n κ. m αντίστοιχα δεν έχουν κοινή συνιστώσα τότε

$$\sum I_p(F,G) = mn$$

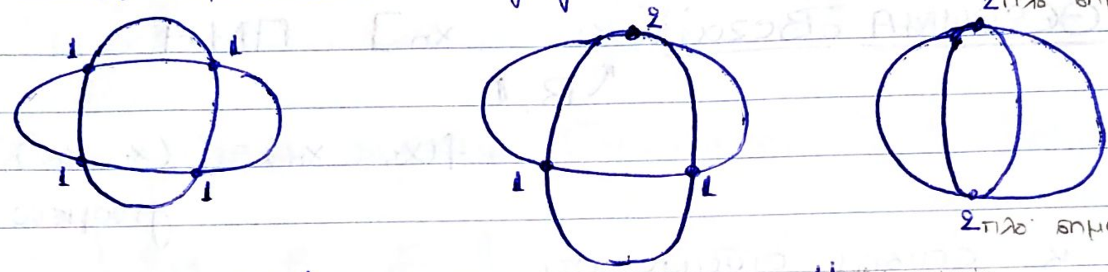
δηλ. έχουν ακριβώς mn κοινά σημεία

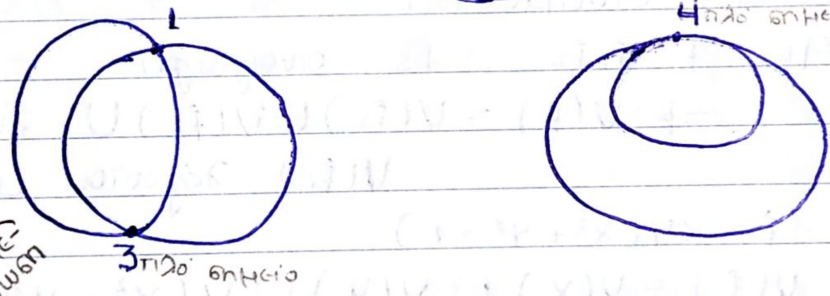
(το αντίστροφο του ασθενούς)



Εδώ δε φαίνεται να έχουν κοινά σημεία.
Γι' αυτό πάω στο μιγαδικό κ. θα δω μάλιστα ότι έχουν 2 κοινά σημεία, το $(0,i)$ κ. το $(0,-i)$.

Προβολικό μιγαδικό επίπεδο
$V(F)$, $V(G)$ ανάγωγες 2ου βαθμού



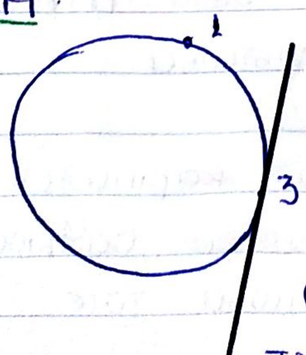


για αυτήν την περίπτωση

SOS για τέλος

Πχ. Βρείτε μια 2βάθμια ανάγωγη καμπύλη που να τέμνει την $V(X^2+Y^2-Z^2)$ μόνο στα σημεία της $(1,0,1)$ κ. $(1,1,\sqrt{2})$ με πολλ/τητα τομής 3 κ. 1 αντ.

ΛΥΣΗ:



Πρώτα θα λύσω το πρόβλ. χρησιμοποιώντας μη ανάγωγη, δηλ δύο ευθείες.

↓ άρα

Θέλω δύο ευθείες που να τέμνει τον κύκλο σε αυτά τα σημεία.
Θα βρω την εφαπτόμενη

Η L_1 διέρχεται από $(1,0,1)$, $(1,1,\sqrt{2})$

Η L_2 εφαπτόμενη στο $(1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \iff x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -x - (\sqrt{2}-1)y + z = 0 \; : L_1$$

$$F = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,0,1)} = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,0,1)} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -2z \rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,0,1)} = -2$$

Άρα: $2x - 2z = 0 \iff x - z = 0 : L_2$

Απλ. $L_1 = -x + (1-\sqrt{2})y + z$

$L_2 = x - z$

Το κόλπο τώρα... !! !!

$$\begin{cases} F = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ L_1 L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = 0 \text{ ή } L_2 = 0 \end{cases}$$

Αν $L_1 = 0$ κ. $F = 0 \rightarrow (1,0,1)$, $(1,1,\sqrt{2})$

Αν $L_2 = 0$ κ. $F = 0 \rightarrow (1,0,1)$, $(1,0,1)$

Δηλ. $(1,0,1)$ 3πλό σημείο
κ. $(1,1,\sqrt{2})$ απλό

<u>Αλλά</u>: L_1L_2 <u>μη</u> ανάγωγη !
Τι κάνω ?

↓

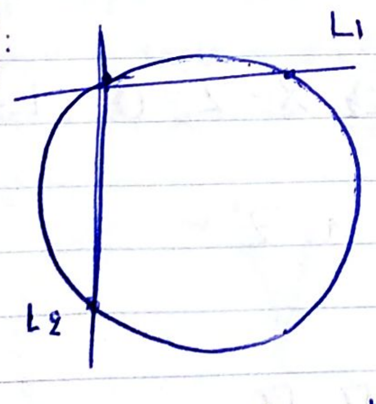
$$F = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$
$$G = L_1L_2 + s(x^2 + y^2 - z^2)$$

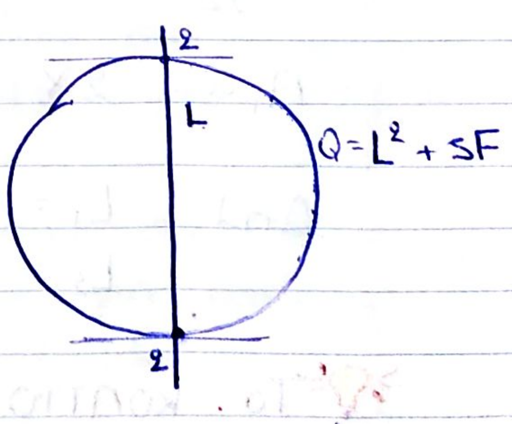
Υποθ. ότι τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.
Θέλω να διαλέξω κατάλληλα s ώστε $L_1L_2 + sF$ να είναι ανάγωγη.
Πώς το κάνω αυτό ? → Με Εσσιανή !

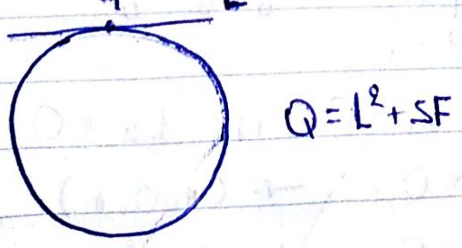
$$\begin{vmatrix} & s & \\ s & & \\ & & s \end{vmatrix} = s^3 a \qquad s \neq 0$$

Αυτό έχει πολλή δουλειά...
Μπορώ να βάλω τυχαίο $s \neq 0$ ώστε η εξ. να είναι ανάγωγη (πρέπει να μου πολύ ατυχή για να μη μου βγει ανάγωγη !)

$\boxed{\text{Περιπτ.}}$:



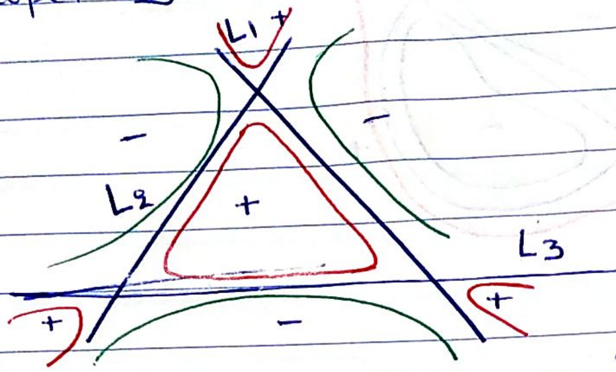




Ιδέα Kleine για να σχεδιάζω καμπύλες:

π.χ. Θέλω να σχεδιάσω καμπ. 3ου βαθμού

Θεωρεί 3 ευθείες L_1, L_2, L_3



αν $\varepsilon > 0$

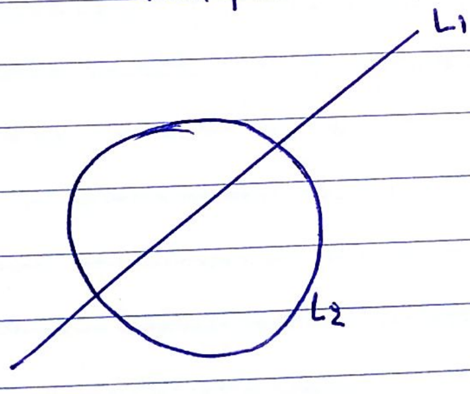
αν $\varepsilon < 0$

Θεωρεί την εξής συν/ση

$$z = f(x,y) = \varepsilon$$
$$= L_1 L_2 L_3$$
$$\overset{\pi.\chi.}{=} (2x-3y+5)(2x+7y+2)(3x+1)(y-7)$$

ή παίρνει κύκλο με ευθεία

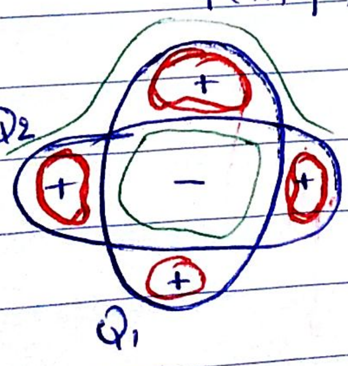
$$f(x,y) = Q_1 L_1 = \varepsilon$$



(...)

ή για 4 βαθμ. παίρνω 2 ελλείψεις

$$f(x,y) = Q_1 Q_2 = \varepsilon$$



$\varepsilon > 0$

$\varepsilon < 0$

ή για 36. $f(x,y) = QL^2 = \varepsilon$

$\varepsilon > 0$

$\varepsilon < 0$